АЛГОРИТМА ПРОГОНКИ МЕТОДОМ РЕЛАКСАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ГАЗЛИФТА

О.З. Намазов[1], Р.М. Тагиев[2], Г.С. Алиева[3]

[1] Сумгаитский Государственный Университет, Сумгаит, Азербайджан
[2]Бакинский Университет Бизнеса , Баку, Азербайджан
[3]Институт Прикладной Математики, Бакинский Государственный Университет, Баку, Азербайджан
e-mail: tagiyev.reshad@gmail.com, orxan-namazov-1989@mail.ru,galiyeva20@mail.ru

Резюме: Зависимость давления газа и газожидкостной смеси от объема соответствующего газа разыскивается как линейная функция (метод прогонки). Метод прогонки применяется к задаче с начальными условиями с малым параметром для системы двумерных гиперболических уравнений первого порядка, описывающих движение газа и газожидкостной смеси, соответствующей процессу газлифта в добыче нефти в кольцевом пространстве и подъемнике. Предлагается асимптотический метод для решения соответствующего квазилинейного уравнения. Находится разложение функции неочевидной формы в ряд Маклерона. Эффективность метода решения иллюстрируется на конкретном примере.

Ключевые слова: газлифт, гиперболические уравнения, дифференциальные уравнения, метод прогонки, метод релаксации, метод характеристики.

1. Введение

Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения с постоянным коэффициентом дается согласно теории Эйлера [4]. Как известно, решение задачи Коши для дифференциального уравнения гиперболического типа второго порядка с постоянным коэффициентом дается формулами Даламбера (в двумерном случае), Пуассона (трехмерный случай), Кирхгоф (четырехмерный случай) [10, 11]. Смешанная задача для этих уравнений дана в работах [14, 15]. А в рассматриваемой работе во время добычи нефти методом газлифта к дифференциальным уравнениям с частными производными гиперболического типа с малым параметром, описывающим движение, применяется метод прогонки [1,17]. Здесь для нахождения решения применяется замена $P(z,t,\varepsilon)=S(z,t,\varepsilon)\cdot Q(z,t,\varepsilon)+\alpha(t)\cdot R(z)$. Показывается, что при применении к уравнениям движения метода прогонки коэффициенты этих функций находятся с помощью двух дифференциальных уравнений. Первое из них является решением классического квазилинейного уравнения с частными производными, а второе является решением обыкновенного дифференциального уравнения. Решение квазилинейного уравнения ищется в неявной форме. Основываясь на методе характеристик [12, 16] приводится решение задачи Коши для этих уравнений. Результат иллюстрируется примером из конкретной практической задачи [2, 3].

2. Постановка задачи

Известно [6,9,13], что система дифференциальных уравнений гиперболического типа с частными производными, описывающих движения газа в кольцевом пространстве и газожидкостной смеси в подъемнике в процессе газлифта имеет следующий вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_i(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{c_i^2}{F_i} \cdot \dfrac{\partial Q_i(x,t)}{\partial x}, & i = 1,2 \\ \dfrac{\partial Q_i(x,t)}{\partial t} = -F_i\,\dfrac{\partial P_i(x,t)}{\partial x} - 2a_i Q_i(x,t) & t > 0,\ x \in (0, 2l) \end{cases}. \quad (1)$$

Здесь $P_i(x,t)$-давление накачиваемого в трубу газа (газожидкостная смесь в подъемнике), $Q_i(x,t)$-объем газа, c_i-скорость звука, $l-$глубина скважины, параметр a_i-находится с помощью выражения $2a_i = \dfrac{g}{\omega_c} + \dfrac{\lambda\omega}{2D}$. В этом выражении $\lambda-$коэффициент гидравлического сопротивления, $g-$ ускорение свободного падения, $D-$эффективный диаметр кольцевого пространства и подъемника. Индексы 1 и 2- параметры, описывающие движение в кольцевом пространстве и подъемнике, соответственно.

Если решить систему (1) с помощью метода прямых линий и определить объем и давление газожидкостной смеси в каждой точке, тогда число уравнений в системе дифференциальных уравнений будет слишком велико, и во время компьютерных вычислений возникнут серьезные погрешности. Поэтому мы рассматриваем решение задачи с помощью метода релаксации с добавлением малого параметра ε , т.е. в системе (1) рассмотрим обратное значение глубины скважины как малый параметр $\varepsilon = \dfrac{1}{2l}$ и проведем замену $z = \dfrac{x}{2l} = \varepsilon x$ [5]. В результате из системы (1) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_i(z,t,\varepsilon)}{\partial t} = -\dfrac{c_i^2}{F_i} \cdot \dfrac{\partial Q_i(z,t,\varepsilon)}{\partial z}\varepsilon, \\ \dfrac{\partial Q_i(z,t,\varepsilon)}{\partial t} = -F_i\,\dfrac{\partial P_i(z,t,\varepsilon)}{\partial z}\varepsilon - 2a_i Q_i(z,t,\varepsilon). \end{cases} \quad (2)$$

Граничные условия полученной системы уравнений (2) определим в следующем виде [6,7]:

$$\begin{cases} P(0,t,\varepsilon) = P_0(t,\varepsilon), \\ Q(0,t,\varepsilon) = Q_0(t,\varepsilon), \end{cases} \tag{3}$$

Меняя роли аргументов z и t, мы можем написать уравнения (2) в виде следующих эквивалентных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P(z,t,\varepsilon)}{\partial z} = -\dfrac{c^2}{F} \cdot \dfrac{\partial Q(z,t,\varepsilon)}{\partial t}\varepsilon, \\ \dfrac{\partial Q(z,t,\varepsilon)}{\partial z} = -F\dfrac{\partial P(z,t,\varepsilon)}{\partial t}\varepsilon - 2aQ(z,t,\varepsilon). \end{cases} \quad x \in (-\infty;+\infty), \ t > 0. \tag{4}$$

Тогда начальными условиями будут

$$\begin{cases} P(z,0,\varepsilon) = P_0(z,\varepsilon), \\ Q(z,0,\varepsilon) = Q_0(z,\varepsilon), \end{cases} \quad x \in (-\infty;+\infty). \tag{5}$$

Итак, мы получили задачу (4) и (5), эквивалентную задаче (2) и (3). Так как (4) - линейное уравнение, по аналогии мы можем искать зависимость давления $P(z,t,\varepsilon)$ от объема $Q(z,t,\varepsilon)$ газожидкостной смеси в следующем виде [1,8]:

$$P(z,t,\varepsilon) = S(z,t,\varepsilon) \cdot Q(z,t,\varepsilon) + \alpha(t) \cdot R(z). \tag{6}$$

Здесь мы должны определить $S(z,t,\varepsilon)$ и $R(z)$, а скалярная функция $\alpha(t)$ - любая функция, удовлетворяющая следующему условию

$$\alpha(0) = 0, \int_0^\infty \alpha(t)dt = 1 \ . \tag{7}$$

В частном случае можно выбрать $\alpha(t)$ в виде $\alpha(t) = te^{-t}$.

Чтобы применить метод прогонки, из (6) получим производные по z и t.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P(z,t,\varepsilon)}{\partial z} = \dfrac{\partial S(z,t,\varepsilon)}{\partial z}Q(z,t,\varepsilon) + S(z,t,\varepsilon)\dfrac{\partial Q(z,t,\varepsilon)}{\partial z} + \alpha(t)R'(z), \\ \dfrac{\partial P(z,t,\varepsilon)}{\partial t} = \dfrac{\partial S(z,t,\varepsilon)}{\partial t}Q(z,t,\varepsilon) + S(z,t,\varepsilon)\dfrac{\partial Q(z,t,\varepsilon)}{\partial t} + \alpha'(t)R(z). \end{cases} \tag{8}$$

Если учитывать производные (8) в системе (4), получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S(z,t,\varepsilon)}{\partial z} Q(z,t,\varepsilon) + S(z,t,\varepsilon)\dfrac{\partial Q(z,t,\varepsilon)}{\partial z} + \alpha(t)R'(z) = -\dfrac{c^2}{F}\dfrac{\partial Q(z,t,\varepsilon)}{\partial t}\varepsilon \\ \dfrac{\partial Q(z,t,\varepsilon)}{\partial z} = -F\varepsilon\left(\dfrac{\partial S(z,t,\varepsilon)}{\partial t} Q(z,t,\varepsilon) + S(z,t,\varepsilon)\dfrac{\partial Q(z,t,\varepsilon)}{\partial t} + \right. \\ \quad \left. + \alpha'(t)R(z)\right) - 2aQ(z,t,\varepsilon). \end{cases} \tag{9}$$

Учитывая $\dfrac{\partial Q(z,t,\varepsilon)}{\partial z}$ из второго уравнения этой системы в первом уравнении , получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial S(z,t,\varepsilon)}{\partial z} Q(z,t,\varepsilon) - \\ &-\varepsilon FS(z,t,\varepsilon)\left(\frac{\partial S(z,t,\varepsilon)}{\partial t} Q(z,t,\varepsilon) + S(z,t,\varepsilon)\frac{\partial Q(z,t,\varepsilon)}{\partial t} + \alpha'(t)R(z)\right) - \\ &-2aS(z,t,\varepsilon)Q(z,t,\varepsilon) + \alpha(t)R'(z) = -\frac{c^2}{F}\frac{\partial Q(z,t,\varepsilon)}{\partial t}\varepsilon. \end{aligned} \tag{10}$$

Если упростить уравнение (10), то

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial S(z,t,\varepsilon)}{\partial z} - \varepsilon FS(z,t,\varepsilon)\frac{\partial S(z,t,\varepsilon)}{\partial t} - 2aS(z,t,\varepsilon)\right) Q(z,t,\varepsilon) + \\ &+\left(\frac{c^2}{F}\varepsilon - \varepsilon FS^2\right)\frac{\partial Q(z,t,\varepsilon)}{\partial t} - \varepsilon FS(z,t,\varepsilon)\alpha'(t)R(z) + \alpha(t)R'(z) = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Проинтегрируем полученное выражение (11):

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \left[\left(\frac{\partial S(z,t,\varepsilon)}{\partial z} - \varepsilon FS(z,t,\varepsilon)\frac{\partial S(z,t,\varepsilon)}{\partial t} - 2aS(z,t,\varepsilon)\right) Q(z,t,\varepsilon) + \right. \\ &\quad + \left(\frac{c^2}{F}\varepsilon - \varepsilon FS^2\right)\frac{\partial Q(z,t,\varepsilon)}{\partial t} - \\ &\left. -\varepsilon FS(z,t,\varepsilon)\alpha'(t)R(z) + \alpha(t)R'(z)\right] dt = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Пользуясь интегрированием по частям, получим:

$$\varepsilon \cdot \int_0^\infty \left(\frac{c^2}{F} - FS^2(z,t,\varepsilon) \right) \frac{\partial Q(z,t,\varepsilon)}{\partial t} dt = \varepsilon \left(\frac{c^2}{F} - FS^2(z,t,\varepsilon) \right) Q(z,t,\varepsilon) \Big|_{t=0}^{\infty} +$$

$$+ 2F\varepsilon \int_0^\infty Q(z,t,\varepsilon) S(z,t,\varepsilon) \frac{\partial S(z,t,\varepsilon)}{\partial t} dt.$$

Если учитывать это выражение в (12), то получим:

$$\int_0^\infty \left[\frac{\partial S(z,t,\varepsilon)}{\partial z} - \varepsilon FS(z,t,\varepsilon) \frac{\partial S(z,t,\varepsilon)}{\partial t} - 2aS(z,t,\varepsilon) + \right.$$

$$\left. + 2\varepsilon FS(z,t,\varepsilon) \frac{\partial S(z,t,\varepsilon)}{\partial t} \right] Q(z,t,\varepsilon) dt + R'(z) - \tag{13}$$

$$- \varepsilon FR(z) \int_0^\infty S(z,t,\varepsilon) \alpha'(t) dt = 0.$$

Если принять, что полученное выражение удовлетворяется независимо от $Q(z,t,\varepsilon)$, тогда получаются выражения:

$$\frac{\partial S(z,t,\varepsilon)}{\partial z} + \varepsilon FS(z,t,\varepsilon) \frac{\partial S(z,t,\varepsilon)}{\partial t} - 2aS(z,t,\varepsilon) = 0 \tag{14}$$

$$R'(z) - \varepsilon \left(\int_0^\infty S(z,t,\varepsilon) \alpha'(t) dt \right) FR(z) = 0 \tag{15}$$

Полученное уравнение (14) – квазилинейное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка.

Допустим, что для начальных задач (4) и (5) предлагается, чтобы $\lim_{t\to\infty} Q(z,t,\varepsilon) = 0$ и $\lim_{t\to\infty} P(z,t,\varepsilon) = 0$. Если условие $\left(\frac{c^2}{F} - FS^2(z,t,\varepsilon) \right) Q(z,t,\varepsilon) \Big|_{t=0}^{\infty} = 0$ выполняется, тогда мы можем написать:

$$P(z,t,\varepsilon) = S(z,t,\varepsilon) \cdot Q(z,t,\varepsilon). \tag{16}$$

(15) является однородным уравнением так как уравнение не органичная общность можно взят $R(z) = 0$.

Итак, на основе постановки задач (4) и (5) нужно решать квазилинейное уравнение (14) для следующих начальных условий:

$$S(z,0,\varepsilon)=\varphi(z)=\frac{P_0(z,\varepsilon)}{Q_0(z,\varepsilon)}. \tag{17}$$

Решение уравнения (14) будем искать в неявной форме:

$$\chi(z,t,S(z,t,\varepsilon))=0 \tag{18}$$

Если продифференцировать выражение (18) по t и z, получим:

$$\frac{\partial\chi}{\partial z}+\frac{\partial\chi}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial z}=0,\ \frac{\partial\chi}{\partial t}+\frac{\partial\chi}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial t}=0,$$

или

$$\frac{\partial S(z,t,\varepsilon)}{\partial z}=-\frac{\frac{\partial\chi}{\partial z}}{\frac{\partial\chi}{\partial S}},\ \frac{\partial S(z,t,\varepsilon)}{\partial t}=-\frac{\frac{\partial\chi}{\partial t}}{\frac{\partial\chi}{\partial S}}. \tag{19}$$

Если учесть выражение (19) в (14), то получим:

$$-\frac{\frac{\partial\chi}{\partial z}}{\frac{\partial\chi}{\partial S}}+\varepsilon FS\frac{-\frac{\partial\chi}{\partial t}}{\frac{\partial\chi}{\partial S}}-2aS=0$$

или

$$\frac{\partial\chi}{\partial z}+FS\varepsilon\frac{\partial\chi}{\partial t}+2aS\frac{\partial\chi}{\partial S}=0. \tag{20}$$

Полученное нами это выражение является дифференциальным уравнением первого порядка с частными производными для $\chi(z,t,S(z,t,\varepsilon))$. Чтобы решить квазилинейное уравнение (14) с начальными условиями (17) пользуются методом характеристик. Характеристики уравнения (20) имеют следующий вид:

$$\frac{dz}{1}=\frac{dt}{\varepsilon FS}=\frac{dS}{2aS}. \tag{21}$$

Отсюда получаем следующие обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$dS=\frac{2a}{F\varepsilon}dt,\ dS=2aSdz.$$

Если проинтегрировать последние два уравнения, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases}\ln S(z,t,\varepsilon)-2az=C_1\\ S(z,t,\varepsilon)-\dfrac{2at}{F\varepsilon}=C_2.\end{cases} \tag{22}$$

Здесь C_1 и C_2 - постоянные, определяемые из характеристических уравнений. В системе (22) примем $t=0$

$$\begin{cases} \ln S(z,0,\varepsilon)-2az=C_1, \\ S(z,0,\varepsilon)=C_2. \end{cases}$$

и в (17) учтем граничное условие:

$$\begin{cases} \ln\varphi(z)-2az=C_1, \\ \varphi(z)=C_2. \end{cases}$$

Последнее равенство этой системы напишем в виде $z=\varphi^{-1}(C_2)$ и учтем в первом уравнении системы:

$$\ln C_2-2a\varphi^{-1}(C_2)=C_1,$$

$$\varphi^{-1}(C_2)=\frac{1}{2a}(\ln C_2-C_1),$$

$$C_2=\varphi\left(\frac{1}{2a}(\ln C_2-C_1)\right).$$

Последнее равенство подставим в (22) :

$$S(z,t,\varepsilon)-\frac{2at}{F\varepsilon}=\varphi\left(\frac{1}{2a}(\ln C_2-C_1)\right),$$

или

$$S(z,t,\varepsilon)-\frac{2at}{F\varepsilon}=\varphi\left(\frac{1}{2a}\ln\left(S(z,t,\varepsilon)-\frac{2at}{F\varepsilon}\right)-\frac{1}{2a}(\ln S(z,t,\varepsilon)-2az)\right).$$

Последнее выражение можем написать в следующем виде:

$$S(z,t,\varepsilon)-\frac{2at}{F\varepsilon}=\varphi\left(\frac{1}{2a}\ln\left(1-\frac{2at}{\varepsilon FS(z,t,\varepsilon)}\right)+z\right). \qquad (23)$$

Легко можно показать, что выражение $S(z,t,\varepsilon)$, полученное из (23) при начальных условиях (17) является решением квазилинейного уравнения (14) [1].

2. Асимптотический метод для определения параметров $P(z,t,\varepsilon)$ и $Q(z,t,\varepsilon)$ с помощью параметра $S(z,t,\varepsilon)$, заданной в неявном виде:

Если в соответствии с методом релаксации для определения параметра $S(z,t,\varepsilon)$ произвести замену $\frac{1}{\varepsilon}=\mu$, то разложение выражения (23) будет в следующем виде:

$$S(z,t,\varepsilon)-\frac{2at}{\varepsilon F}=S\left(z,t,\frac{1}{\mu}\right)-\mu\frac{2at}{F}=\tilde{S}(z,t,\mu)-2\mu\frac{at}{F}=$$
$$=\varphi\left(\frac{1}{2a}\ln\left(1-\frac{\mu}{F}\frac{2at}{\tilde{S}(z,t,\mu)}\right)+z\right). \tag{24}$$

Разложение (24) в ряд Маклерона будет иметь вид:

$$\tilde{S}(z,t,\mu)=\tilde{S}(z,t,0)+\tilde{S}'(z,t,\mu)_{\mu}\Big|_{\mu=0}\cdot\mu+\tilde{S}''(z,t,\mu)_{\mu}\Big|_{\mu=0}\cdot\frac{\mu^2}{2!}+$$
$$+\tilde{S}'''(z,t,\mu)_{\mu}\Big|_{\mu=0}\cdot\frac{\mu^3}{3!}+... \tag{25}$$

В разложении (25) для определения первого члена пользуются случаем $\mu=0$:

$$\tilde{S}(z,t,0)=\varphi(z)=\frac{\tilde{P}_0(z,t,0)}{\tilde{Q}_0(z,t,0)}.$$

Второй член разложения можно определить в следующем виде:

$$\tilde{S}'(z,t,\mu)_{\mu}\Big|_{\mu=0}=\frac{2at}{F}+\varphi'\left(\frac{1}{2a}\ln\left(1-\frac{\mu}{F}\frac{2at}{\tilde{S}(z,t,\mu)}\right)+z\right)\Bigg|_{\mu=0}\frac{1}{2a}\times$$
$$\times\frac{2at}{F}\frac{1}{1-\frac{2at}{F}\frac{\mu}{\tilde{S}(z,t,\mu)}}\Bigg|_{\mu=0}\times\frac{-\tilde{S}(z,t,\mu)+\tilde{S}'(z,t,\mu)\mu}{\tilde{S}^2(z,t,\mu)}\Bigg|_{\mu=0}=$$
$$=\frac{2at}{F}-\tilde{S}'(z,t,0)\cdot\frac{t}{F\tilde{S}(z,t,0)}=\frac{2at}{F}-\frac{t}{F}\cdot\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$$

Проведя аналогию можно определить и другие члены уравнения (25). Если учитывать эти члены в (25), тогда параметр $S(z,t,\mu)$ можно определить в следующем виде:

$$\tilde{S}(z,t,\mu)=\varphi(z)+\left(\frac{2at}{F}-\frac{t}{F}\cdot\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right)\cdot\mu+... \tag{26}$$

Если учитывать замену $\dfrac{1}{\varepsilon} = \mu$ в (26) , тогда выражение (23) можно определить в виде:

$$S(z,t,\varepsilon) = \varphi(z) + \left(\frac{2at}{F} - \frac{t}{F} \cdot \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right) \cdot \frac{1}{\varepsilon} + \ldots$$

Чтобы определить $P(z,t,\varepsilon)$ в (16) с помощью $Q(z,t,\varepsilon)$ учтем $S(z,t,\varepsilon)$ в том же выражении:

$$\frac{\partial S(z,t,\varepsilon)}{\partial z} Q(z,t,\varepsilon) + S(z,t,\varepsilon) \frac{\partial Q(z,t,\varepsilon)}{\partial z} = -\frac{c^2}{F} \varepsilon \frac{\partial Q(z,t,\varepsilon)}{\partial t} \qquad (27)$$

Характеристические уравнения выражения (27) будут иметь следующий вид:

$$\frac{\partial Q(z,t,\varepsilon)}{\partial z} + \frac{c^2}{FS(z,t,\varepsilon)} \varepsilon \frac{\partial Q(z,t,\varepsilon)}{\partial t} + \frac{1}{S(z,t,\varepsilon)} \frac{\partial S(z,t,\varepsilon)}{\partial z} Q(z,t,\varepsilon) = 0,$$

$$\frac{dz}{1} = \frac{dt}{\dfrac{c^2 \varepsilon}{FS(z,t,\varepsilon)}} = \frac{dQ}{S^{-1}(z,t,\varepsilon) \dfrac{\partial S(z,t,\varepsilon)}{\partial z}}.$$

Отсюда

$$Q(z,t,\varepsilon) = \int_0^z S^{-1}(\xi,t,\varepsilon) \frac{\partial S(\xi,t,\varepsilon)}{\partial \xi} d\xi$$

или

$$\tilde{Q}(z,t,\eta) = \ln \left| \tilde{S}(z,t,\eta) \right|. \qquad (28)$$

Разложение выражения (28) имеет следующий вид:

$$\tilde{Q}(z,t,\eta) = \ln \left| \tilde{S}(z,t,0) \right| + \frac{\left. \dfrac{\partial \tilde{S}(z,t,\eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=0}}{\left. \tilde{S}(z,t,\eta) \right|_{\eta=0}} \cdot \eta +$$
$$+ \frac{\left. \dfrac{\partial^2 \tilde{S}(z,t,\eta)}{\partial \eta^2} \tilde{S}(z,t,0) - \left(\dfrac{\partial \tilde{S}(z,t,\eta)}{\partial \eta} \right)^2 \right|_{\eta=0}}{\left. \tilde{S}^2(z,t,\eta) \right|_{\eta=0}} \cdot \frac{\eta^2}{2!} + \ldots \qquad (29)$$

Разложение параметра $Q(z,t,\varepsilon)$ определяется в следующем виде:

$$Q(z,t,\varepsilon)=\ln\left|S(z,t,\infty)\right|+\frac{\left.\frac{\partial S(z,t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=\infty}}{\left.S(z,t,\varepsilon)\right|_{\varepsilon=\infty}}\cdot\frac{1}{\varepsilon}+$$
$$+\frac{\left.\frac{\partial^2 S(z,t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon^2}\tilde{S}(z,t,\infty)-\left(\frac{\partial S(z,t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)^2\right|_{\varepsilon=\infty}}{\left.S^2(z,t,\varepsilon)\right|_{\varepsilon=\infty}}\cdot\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{2!}+\ldots \tag{30}$$

Если функцию $S(z,t,\varepsilon)$, определяющуюся из выражения (26) и функцию $Q(z,t,\varepsilon)$, определяющуюся из выражения (30) учитывать в выражении (16), можем найти функцию $P(z,t,\varepsilon)$.

Пример: Как и в [6], примем $\varphi(z)=Ce^{-\beta z}$ из (17) (C-скорость звука в соответствующей среде и β любое постоянное [6]). Вначале можем определить функцию $S(z,t,\varepsilon)$.

$$S(z,t,\varepsilon)=Ce^{-\beta z}+\left(\frac{2at-\beta t}{F}\right)\cdot\frac{1}{\varepsilon} \tag{31}$$

Если учесть найденное из этого выражения параметр $S(z,t,\varepsilon)$ в выражении (30), можем найти параметр $Q(z,t,\varepsilon)$. Затем учитывая найденные параметры $S(z,t,\varepsilon)$ и $Q(z,t,\varepsilon)$ в (16) можно найти соответствующее давление газа

$$P(z,t,\varepsilon)=\left(\ln\left|S(z,t,\infty)\right|+\frac{\left.\frac{\partial S(z,t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=\infty}}{\left.S(z,t,\varepsilon)\right|_{\varepsilon=\infty}}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\right)\cdot\left(Ce^{-\beta z}+\left(\frac{2at-\beta t}{F}\right)\cdot\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Полученные результаты сравнивались с результатами из [1] и решения совпадают с точностью до 10^2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aliev, F. A., Aliev, N. A., Hasanov, K. G., Guliev, A. P., Turarov, A. K., &Isaeva, G. V. (2015). Numerical-analytical method for solving of the first order partial quasi-linear equations. TWMS J. Pure Appl. Math, 6(2), 158-164.

2. Aliev, F.A., Ismailov, N.A., Mukhtarova, N.S., (2015), Algorithm to determine the optimal solution of a boundary control problem, Automation and Remote Control, 76(4), pp.627-633.
3. Camponogara, V.I., Plucenio, A., Teixeira, A.F., Compos, S.R.V., (2010), Automation system for gas-lifted oil wells: model identification control and optimization, Journal of petroleum science and engineering, 70, pp.157-167.
4. Hasanov, K.K, Tanriverdiyev, T.S., (2015). Optimal control problem describing by the Cauchy problem for the first Ooder linear hyperbolic system with two independent variables, TWMS J. Pure Appl. Math., 6(1), pp.100-110.
5. Mutallimov M.M., Askerov I.M., Ismailov N.A., RajabovM.F. An asymptotical method to construction a digital optimal regime for the gas-lift process, Appl. Comput. Math., V.9, N.1, 2010, pp.77-84.
6. Алиев Н.А., Алиев Ф.А., Гулиев А. П., Ильясов М.Х.. Метод рядов в решении одной краевой задачи для системы уравнений гиперболического типа, возникающих при добыче нефти. PROCEEDINGS of the Institute of Applied Mathematics, Vol.2, No.2, 2013, с.113-136.
7. Алиев Н.А., Гулиев А.П., Тагиев Р.М, Существование и единственность решения одной краевой задачи, описываемой системой уравнений гиперболического типа, Доклад НАН Азерб. - 2014.ТОМ LXX, N.2, с. 10-13.
8. Алиев Ф.А., Гасанов К.К., Гулиев А.П., Метод прогонки для решения системы гиперболических уравнений описывающих движение при добычи нефти, Proceedings of IAM, Vol.3, No.2, 2014, pp.249-256.
9. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Нуриев Н.Б., Задачи моделирования оптимальной стабилизации газлифтного процесса, Прикладная механика, т. 46, No.6, 2010, с.113-122.
10. Бабич В.М., Капилевич М.Б., Михлин С.Г., Натансон Г.И., Ряз П.П., Слободецкий Л.Н., Смирнов М.М., (1964), Линейные уравнения математической физики, Москва, Наука, 1964, с.368
11. Владимиров В.С., (1981), Уравнения математической физики, Москва, Наука, 1981, 512с.
12. Гурсат Э., Курс математического анализа, II (II), Дифференциальные уравнения, Москва, Ленинград, 1933, 285 с.
13. Мирзаджанзаде А.Х. и др., Технология и механика добычи нефти, Москва, Наука, 1986, 382с.
14. Петровский И.Г., Лекции по уравнениям с частными производными, Москва, Наука, 1961,400 с.
15. Соболев, С.Л., Уравнения математической физики, Москва, Наука, 1954, 444с.

16. Степанов В.В., Курс дифференциальных уравнений, Москва, 1950, 466с.
17. Тагиев Р.М., Алиев Н.А., Гулиев А.П., Раджабов М.Ф., Исследование решения системы уравнений гиперболического типа по малому параметру в процессе газлифта. Известия БГУ, сер. Физ.-мат. Наук, 2016, №4, стр. 30-36.

CONSTRUCTION OF THE SWEEP ALGORITHM BY THE RELAXATION METHOD FOR SOLVING GASLIFT PROBLEM

O.Z. Namazov, R.M. Tagiyev, G.S. Alieva

Abstract: The dependence of the gas pressure and the gas-liquid mixture on the volume of the corresponding gas is sought as a linear function (sweep method). The sweep method is applied to the problem with initial conditions with a small parameter for a system of two-dimensional hyperbolic equations of the first order, describing the movement of gas and gas-liquid mixture corresponding to the gas lift process in oil production in the annular space and lift. An asymptotic method for solving the corresponding quasilinear equation is proposed. The decomposition of the function of nonobvious form in the Macleroon seriees is found. The effectiveness of the solution method is illustrated by a specific example.
Keywords: Gas lift, hyperbolic equations, differential equations, sweep method, relaxation method, characterization method.

References

1. Aliev, F. A., Aliev, N. A., Hasanov, K. G., Guliev, A. P., Turarov, A. K., &Isaeva, G. V. (2015). Numerical-analytical method for solving of the first order partial quasi-linear equations. TWMS J. Pure Appl. Math, 6(2), 158-164.
2. Aliev, F.A., Ismailov, N.A., Mukhtarova, N.S., (2015), Algorithm to determine the optimal solution of a boundary control problem, Automation and Remote Control, 76(4), pp.627-633.
3. Camponogara, V.I., Plucenio, A., Teixeira, A.F., Compos, S.R.V., (2010), Automation system for gas-lifted oil wells: model identification control and optimization, Journal of petroleum science and engineering, 70, pp.157-167.
4. Hasanov, K.K, Tanriverdiyev, T.S., (2015). Optimal control problem describing by the Cauchy problem for the first Ooder linear hyperbolic system with two independent variables, TWMS J. Pure Appl. Math., 6(1), pp.100-110.
5. Mutallimov M.M., Askerov I.M., Ismailov N.A., RajabovM.F. An asymptotical method to construction a digital optimal regime for the gaslift process, Appl. Comput. Math., V.9, N.1, 2010, pp.77-84.
6. Aliev N.A., Aliev F.A., Guliev A. P., Il'yasov M.Kh.. Metod ryadov v reshenii odnoy kraevoy zadachi dlya sistemy uravneniy giperbolicheskogo

tipa, voznikayushchikh pri dobyche nefti. Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, Vol.2, No.2, 2013, c.113-136., Aliev, N.A., Aliev, F.A., Guliyev, A.P., Ilyasov, M.H., (2013), Method of series in solving a boundary value problem for a system of hyperbolic equations arising from the production of oil, Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, 12(2), pp.113-138. (in Russian)

7. Aliev N.A., Guliev A.P., Tagiev R.M., Sushchestvovanie i edinstvennost' resheniya odnoy kraevoy zadachi, opisyvaemoy sistemoy uravneniy giperbolicheskogo tipa , Doklady NAN Azerb., No.2, 2014, c.10-13. Aliev N.A., Guliyev A.P., Tagiyev R.M., Existence and uniqueness of the solution of a regional problem described by a system of hyperbolic equations, Proceedings of the ANAS, No.2, 2014, p.10-13.. (in Russian)
8. Aliev F.A., Hasanov K.K., Guliyev A.P., (2014), Sweep method for solving a system of hyperbolic equations describing the movement in oil exploration, Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, 3(2), pp.249- 255.
9. Aliev F.A., Ilyasov M.Kh., Nuriev N.B., Zadachi modelirovaniya optimal'noy stabilizatsii gazliftnogo protsessa, Prikladnaya mekhanika, t. 46, No.6, 2010, s.113-122., Aliev F.A., Ilyasov M.Kh., Nuriev N.B., Problems of simulation of optimal stabilization of the gas-lift process, Applied Mechanics, Vol. 46, No.6, 2010, pp.113-122. (in Russian)
10. Babich V.M., Kapilevich M.B., Mikhlin S.G., Natanson G.I., Ryaz P.P., Slobodetskiy L.N., Smirnov M.M., (1964), Lineynye uravneniya matematicheskoy fiziki, Moskva, Nauka, 1964, c.368. Babich, V.M., Kapilevich, M.B., Mikhlin, S.G., Natanson, G.I, Ryz, P.., Slobodetskiy, L.N., Smirnov, M.M., (1964), Linear Equations of Mathematical Physics, Moscow, Nauka, 368p. (in Russian)
11. Vladimirov V.S., (1981), Uravneniya matematicheskoy fiziki, Moskva, Nauka, 1981, 512s., Vladimirov, V.S., (1981), The equations of Mathematical Physics, Moscow, Nauka, 512p. (in Russian)
12. Gursat E., Kurs matematicheskogo analiza, II (II), Differentsial'nye uravneniya, Moskva, Leningrad, 1933, 285 s., Goursat, E., Course of Mathematical Analysis, II(II), Differential Equations, Moscow, Leningrad, 1933, 285p. (in Russian)
13. Mirzadzhanzade A.Kh. i dr., Tekhnologiya i mekhanika dobychi nefti, M.: Nauka, 1986, 382c. Mirzadzhanzade A.Kh. et al., Technology and Mechanics of Oil Production, M .: Nauka, 1986, p.382 (in Russian)
14. Petrovskiy I.G., Lektsii po uravneniyam s chastnymi proizvodnymi, Moskva, Nauka, 1961,400 s., Petrovsky I.G., (1961), Lectures on Partial Differential Equations, Moscow, 400p. (in Russian)
15. Sobolev, S.L., Uravneniya matematicheskoy fiziki, Moskva, 1954, 444s., Sobolev, S.L., (1954), The Equations of Mathematical Physics, Moscow, 444p. (in Russian)

16. Stepanov V.V., Kurs differentsial'nykh uravneniy, Moskva, 1950, 466s. Stepanov, V.V., Course of Differential Equations, Moscow, 1950, 466s. (in Russian)
17. Tagiev R.M., Aliev N.A., Guliev A.P., Radzhabov M.F., Issledovanie resheniya sistemy uravneniy giperbolicheskogo tipa po malomu parametru v protsesse gazlifta. Izvestiya BSU, ser. Fiz.-mat. Nauk, 2016, №4, str. 30-36. Tagiev R.M., Aliev N.A., Guliev A.P., Rajabov M.F., Investigation of solution hyperbolic equations systems for small parameter in gas lift process., "Baku State University News" 2016, №4, pp. 30-36. (in Russian)